



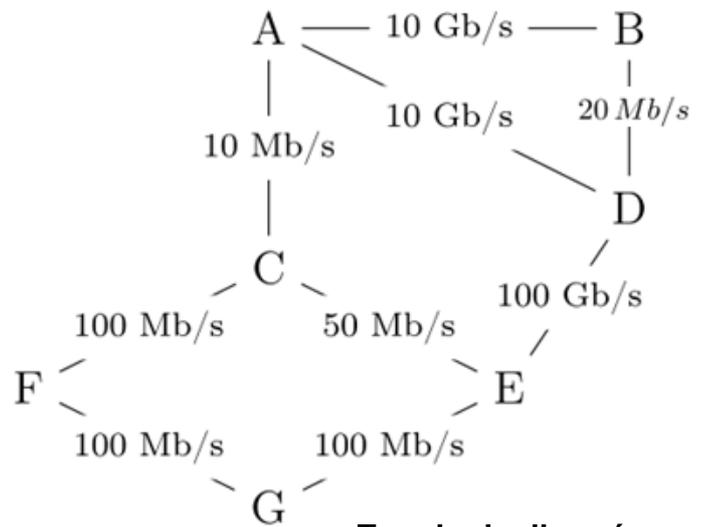
Les graphes

Résumé

Les graphes permettent de caractériser une représentation d'une solution à un grand nombre de problèmes de la vie courante.

Savoir utiliser un graphe pour en déduire l'existence de relations entre deux entités, l'existence d'un chemin, le coût de transit comparatif entre deux chemins est alors possible.

Il existe un très grand nombre d'applications industrielles tel que : le routage d'informations dans les réseaux informatique, l'organisation des tâches dans un atelier de production.

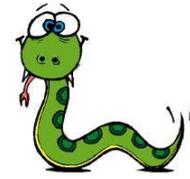


Topologie d'un réseau

Ce domaine est l'un des domaines actif de la recherche en algorithmique.

Sommaire

| | | |
|----------|---|----------|
| 1 | Les graphes quesaco ? | 3 |
| 1.1 | Présentation | 3 |
| 1.2 | Notions de base autour des graphes | 3 |
| 1.3 | Divers types de graphes | 4 |
| 1.4 | Vocabulaire : | 4 |
| 1.5 | Quelques questions | 5 |
| | Acheminement de pétrole | 5 |
| | Quels sont les graphes identiques | 6 |
| | Tracé de graphe | 6 |
| 2 | Représentation en python | 7 |
| 2.1 | Représentation par matrice d'adjacence | 7 |
| | Graphes orientés | 7 |
| | Graphes pondérés | 8 |
| | Graphes non orientés | 9 |
| 2.2 | Les scripts Python | 10 |
| | Une classe Graphe présentation | 10 |
| | Mise en œuvre codage d'un graphe non orienté | 11 |
| | Amélioration impression de la matrice d'adjacence | 11 |
| | Ajout de la possibilité d'impression directement par print(objet) | 12 |
| | Ajout d'une arête (arc non orienté) | 12 |
| | Graphe pondéré | 12 |



| | | |
|----------|--|-----------|
| 2.3 | <i>Représentation par dictionnaire d'adjacence</i> | 14 |
| | Principe de la représentation | 14 |
| | Avantage de cette représentation | 14 |
| 2.4 | <i>Les scripts Python</i> | 14 |
| | Mise en œuvre | 15 |
| | Ajout d'une arête | 15 |
| | Graphe pondéré | 15 |
| 2.5 | <i>Comparaison des deux implantations</i> | 16 |
| | La représentation avec matrice d'adjacence | 16 |
| | La représentation avec dictionnaire d'adjacence | 17 |
| 3 | Parcours de graphes | 18 |
| 3.1 | <i>Présentation</i> | 18 |
| | Parcours en profondeur (DFS : Depth-First Search) | 18 |
| | Parcours en largeur (Breadth First Search) | 18 |
| 3.2 | <i>Implémentation en Python</i> | 19 |
| | Le graphe d'étude | 19 |
| | Version récursive du parcours en profondeur DFS | 19 |
| | Version itérative du parcours en profondeur DFS | 20 |
| 3.3 | <i>Parcours en largeur ou BFS</i> | 21 |
| | Version itérative | 21 |
| 3.4 | <i>L'objet collections.deque</i> | 22 |
| | Fonctionnement en Pile LIFO (Parcours en Profondeur) | 22 |
| | Fonctionnement en File FIFO (Parcours en Largeur) | 22 |
| 3.5 | <i>Exercices</i> | 23 |
| 3.6 | <i>Application</i> | 24 |
| | Détection de chemin | 24 |
| | Détection de cycles | 24 |
| 4 | Mini projets | 25 |
| 4.1 | <i>Détection des composantes connexes</i> | 25 |
| 4.2 | <i>Analyse d'images</i> | 25 |
| 4.3 | <i>Détection de chemins dans les jeux</i> | 25 |
| 5 | Autres ressources | 26 |
| 5.1 | <i>Sur la théorie des graphes</i> | 26 |
| 5.2 | <i>Implémentation Python</i> | 26 |



1 Les graphes quesaco ?

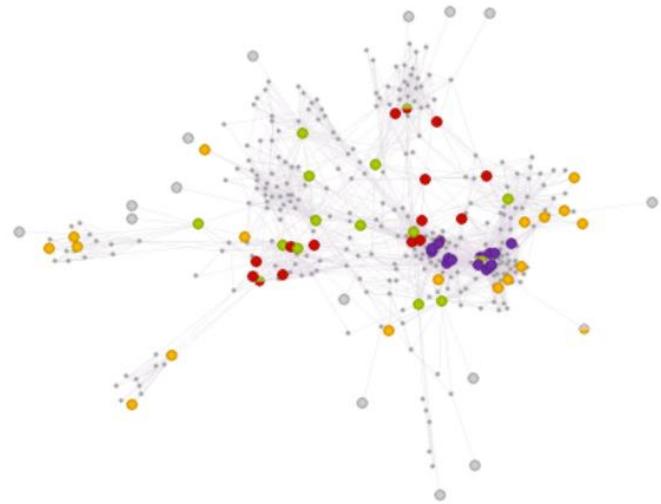
1.1 Présentation

Les graphes sont partout dans notre vie quotidienne, quelques exemples :



1

Réseau autoroutier



2

Le réseau d'amis de Facebook

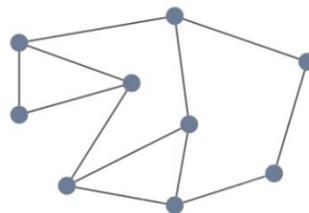
1.2 Notions de base autour des graphes

Qu'est-ce qu'un graphe ?

Un ensemble de **sommets**

Un ensemble d'**arêtes**

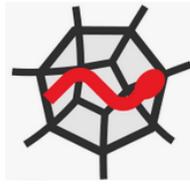
La vidéo ci-dessous introduit les notions de bases sur les graphes.



<https://www.youtube.com/watch?v=YYv2R1cCTa0>

¹ https://static.wikia.nocookie.net/routes/images/1/10/Carte_autoroutes_Concessions.jpg/revision/latest?cb=20101115200414

² <https://www.blogdumoderateur.com/analyser-son-profil-facebook-avec-wolfram-alpha/>

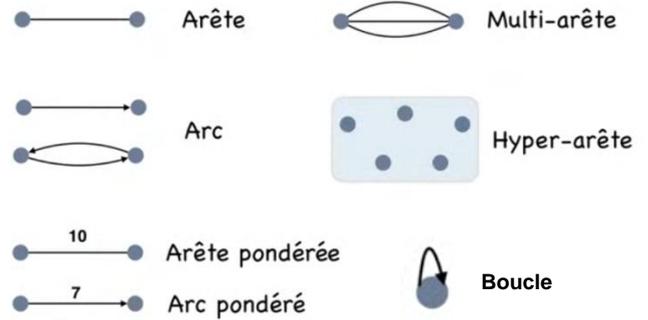


1.3 Divers types de graphes

Graphe orienté, non orienté, pondéré avec boucles tout est là :

https://www.youtube.com/watch?v=O1YdAP-tF2U&list=RDCMUChTjVeNLyR1yuJ1_xCK1WRg&index=12

Diverses « arêtes »



1.4 Vocabulaire :

Sommets ou Nœuds

Arêtes, Arcs : graphe non orienté, graphe orienté

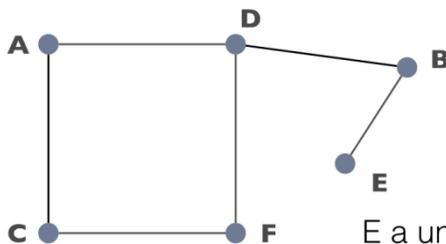
Graphe complet : il existe toutes les arêtes possibles entre tous ses sommets.

Sommets voisins : sommets reliés par une arête.

Degré d'un sommet : nombre de ses voisins.

Voisins de A : D et C

Degré de D = 3



E a un seul voisin : B

E et F ne sont **pas** voisins

Degré de E = 1

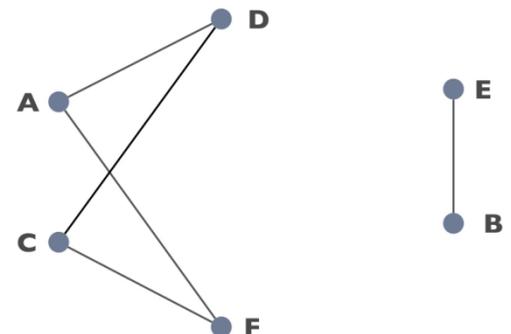
Chemin : succession d'arêtes permettant de relier deux sommets.

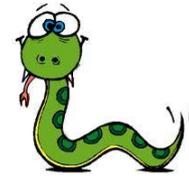
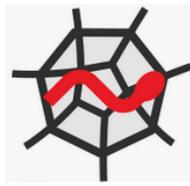
Longueur de chemin : le nombre d'arêtes.

Cycle : un chemin qui part et arrive depuis le même nœud.

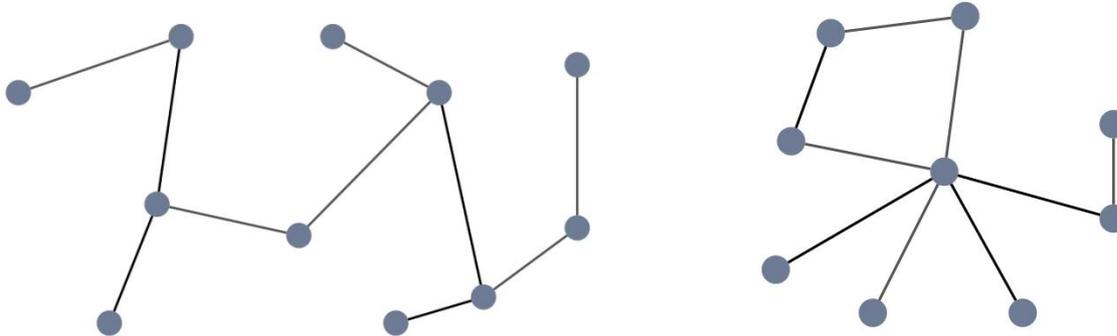
Graphe connexe : toute paire de sommets du graphe peut être reliée par un chemin.

Composante connexe : graphe en plusieurs parties non reliées ensemble.





Arbre : graphe connexe et sans cycle.



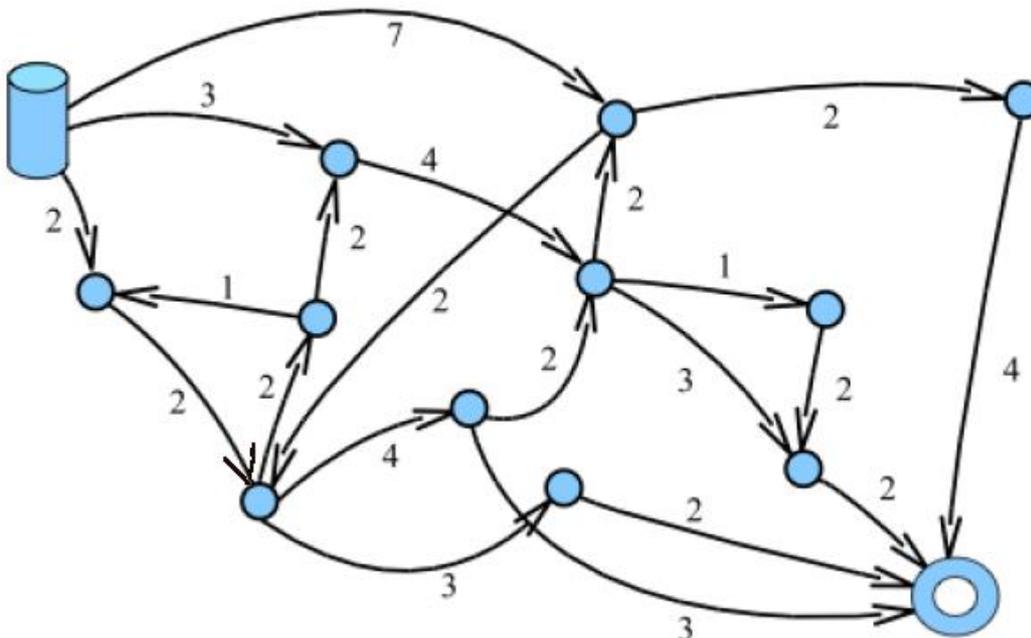
Propriété : somme des degrés = $2 \cdot$ nombre de sommets

1.5 Quelques questions

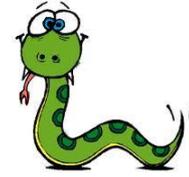
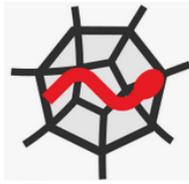
Acheminement de pétrole³

La compagnie pétrolière Inti T'schouff souhaite acheminer du pétrole par oléoduc vers un pays client. Le réseau d'oléoduc comporte plusieurs tronçons, chacun ayant une capacité maximale (en débit) à ne pas dépasser. Les tronçons sont directionnels. Sur le graphe suivant, la compagnie pétrolière est représentée par le cylindre, le client par le jeton. La capacité maximale de chaque arc est indiquée.

Q1. Quel est le débit maximum que la compagnie pétrolière peut envoyer vers le client via le réseau?

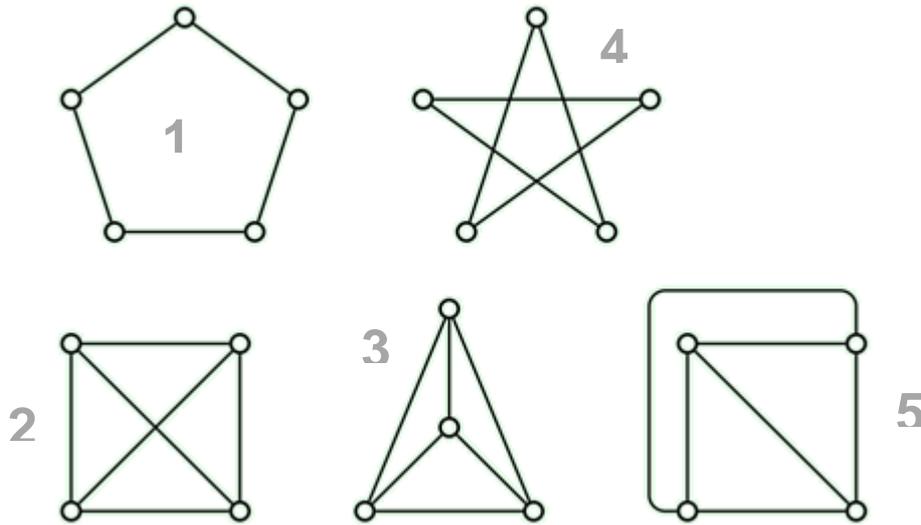


³ Exercices de graphes, Nadia Brauner, UGA.



Quels sont les graphes identiques⁴

Q2. Déterminer les graphes identiques.



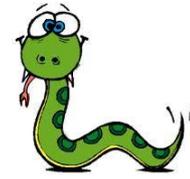
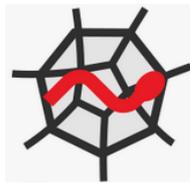
Tracé de graphe

Q3. Construire un graphe orienté dont les sommets sont les entiers compris entre 1 et 12 et dont les arcs représentent la relation « être diviseur de »⁵.



⁴ Ibid.

⁵ D'après exo_graphes_sopena_tout.pdf Éric SOPENA - sopena@labri.fr

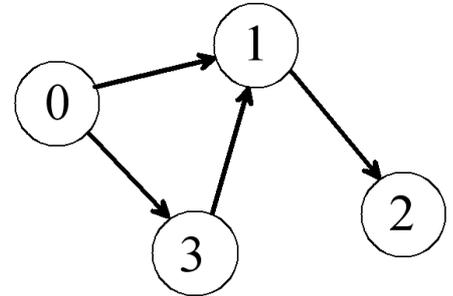


2 Représentation en python⁶

2.1 Représentation par matrice d'adjacence

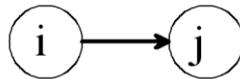
Graphes orientés

Voilà un graphe orienté :



Pour le représenter informatiquement on peut utiliser un tableau de booléens de dimension $N \times N$ ou N est le nombre de nœuds ou sommets du graphe. Chaque valeur de ce tableau représente l'existence d'un arc orienté entre le nœud i et le nœud j :

- $adjacence[i][j] = True$ il existe un arc entre les nœuds i et j



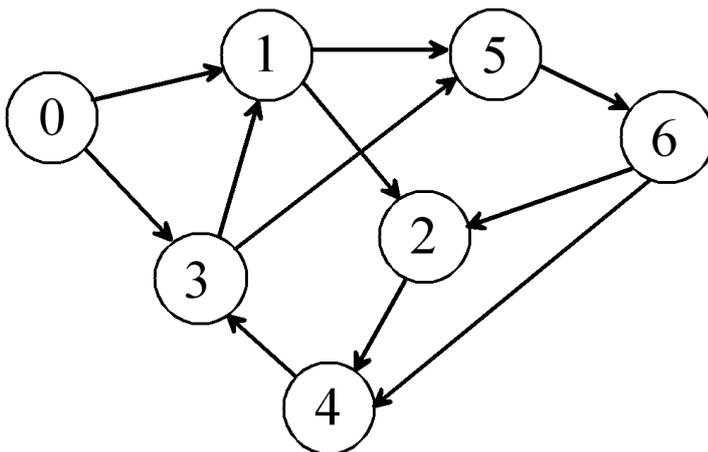
- $adjacence[i][j] = False$ il existe aucun arc entre les nœuds i et j



Matrice d'adjacence du graphe ci-dessus \Rightarrow

| | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | F | T | F | T |
| 1 | F | F | T | F |
| 2 | F | F | F | F |
| 3 | F | T | F | F |

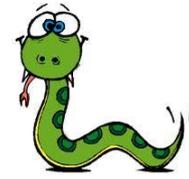
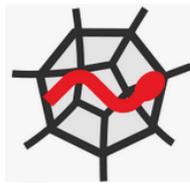
Q4. Donner la matrice d'adjacence du graphe ci-dessous :



| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | | |
| 1 | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | |

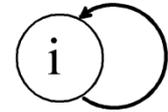


⁶ Les scripts de cette section sont inspirés du livre 24 leçons et exercices corrigés TNSI ellipses.



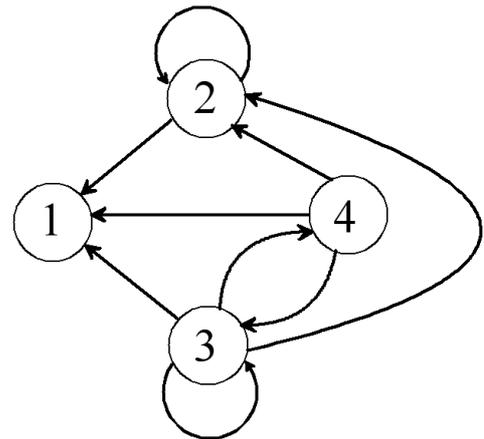
Q5. Cas des graphes non orientés : indiquez comment est renseignée dans ce cas la matrice d'adjacence.

Q6. Cas des boucles : indiquez comment est renseignée dans ce cas la matrice d'adjacence.



Q7. Donner la matrice d'adjacence du graphe ci-contre puis répondre aux questions :

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | |
| 2 | | | | |
| 3 | | | | |
| 4 | | | | |



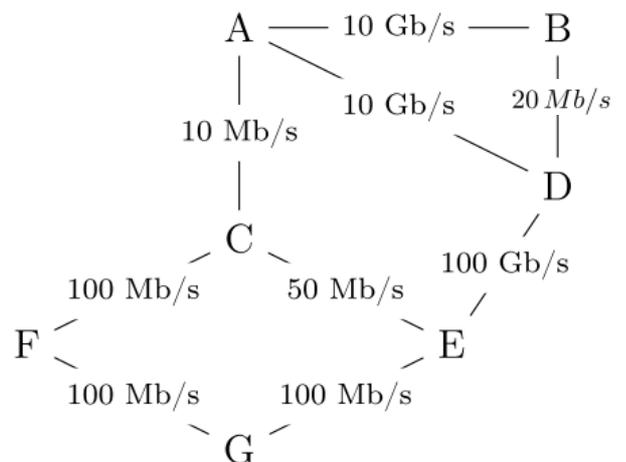
a) Comment peut-on identifier un nœud puits, c'est-à-dire un nœud d'où aucun arc ne part vers un autre nœud dans la matrice d'adjacence ?

b) Comment identifier un nœud qui est relié à tous les autres dans la matrice d'adjacence ?

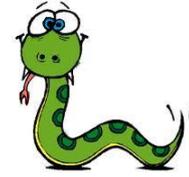
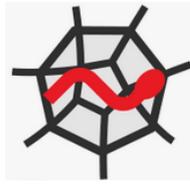
Graphes pondérés

Si l'on veut indiquer un coût de transit entre deux nœuds reliés par un arc, par exemple un temps de transit, un coût en carburant, une capacité en débit d'une liaison alors on indique la valeur à coté de l'arc.

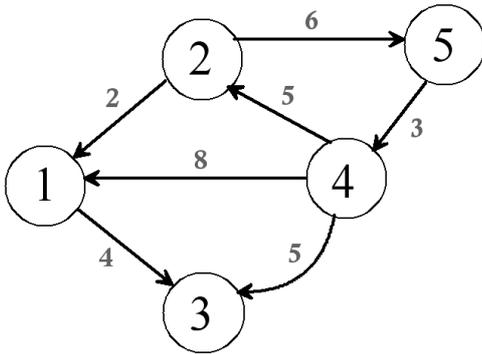
Voir l'illustration⁷ ci-contre d'un réseau numérique interconnectant plusieurs routeurs avec les débits correspondants.



⁷ Issue du sujet0 NSI



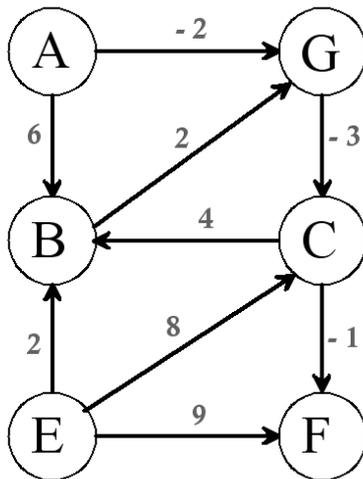
Représentation avec une matrice d'adjacence :



| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1 | ∞ | ∞ | 4 | ∞ | ∞ |
| 2 | 2 | ∞ | ∞ | ∞ | 6 |
| 3 | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ |
| 4 | 8 | 5 | 5 | ∞ | ∞ |
| 5 | ∞ | ∞ | ∞ | 3 | ∞ |

Nous y voyons que l'absence de liaison entre deux nœuds à un poids d'une valeur ∞ .

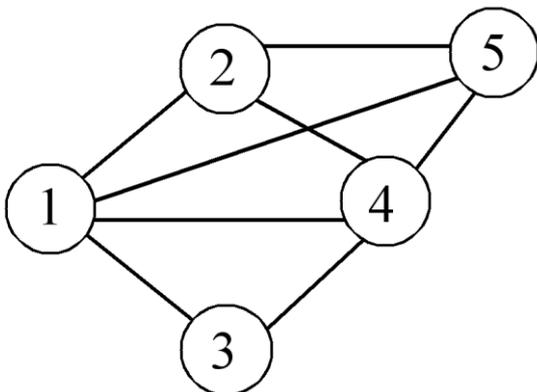
Q8. Remplir la matrice d'adjacence du graphe ci-dessous :



| | A | B | C | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | | | | | |
| B | | | | | | |
| C | | | | | | |
| E | | | | | | |
| F | | | | | | |
| G | | | | | | |

Graphes non orientés

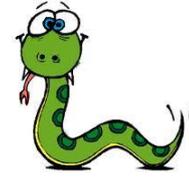
La représentation par une matrice d'adjacence de ces graphes ne pose pas de problèmes particuliers. Chaque liaison occupe deux cases dans la matrice car les liaisons sont symétriques.



| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | F | T | T | T | T |
| 2 | T | F | F | T | T |
| 3 | T | F | F | T | F |
| 4 | T | T | T | F | T |
| 5 | T | T | F | T | F |

Symétrie du graphe non orienté.





La symétrie illustre le fait que les arcs ne sont pas orientés et donc que chaque liaison est bidirectionnelle.

Q9. Retracez le graphe à partir de la matrice d'adjacence ci-dessous, le graphe est-il orienté ou non orienté ?

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | T | T | T |
| 2 | | | T | | T |
| 3 | T | T | | | |
| 4 | T | | | | T |
| 5 | T | T | | T | |

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | T | T | |
| 2 | T | | | | |
| 3 | | | | T | |
| 4 | T | | | | T |
| 5 | | T | | | T |

Q10. Représentez le graphe qui a la matrice d'adjacence ci-dessus.

2.2 Les scripts Python⁸

Une classe Graphe présentation

La classe graphe ci-dessous permet de décrire les graphes avec une matrice d'adjacence. Elle est basée sur le paradigme de programmation objet.

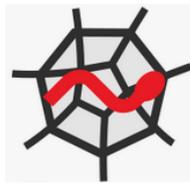
```

5 class Graphe:
6     """un graphe représenté par une matrice d'adjacence,
7       où les sommets sont les entiers 0,1,...,n-1"""
8
9     def __init__(self, n):
10        self.n = n
11        self.adj = [[False] * n for _ in range(n)]
12
13    def ajouter_arc(self, s1, s2):
14        self.adj[s1][s2] = True
15
16    def arc(self, s1, s2):
17        return self.adj[s1][s2]
18
19    def voisins(self, s):
20        v = []
21        for i in range(self.n):
22            if self.adj[s][i]:
23                v.append(i)
24        return v

```



⁸ Les scripts sont inspirés de NSI 24 leçons avec exercices corrigés, ellipses.



Pour réviser nos connaissances en Python et POO répondre aux questions ci-dessous :

POO

- Q11. Quelle est l'utilité de définir une classe Graphe ?
- Q12. Comment s'appellent les fonctions décrites à l'intérieur de la classe ?
- Q13. Comment s'appellent les structures de données qui contiennent les données des entitésinstanciées par la Classe ?
- Q14. Quel est le nom de la fonction `__init__` ?
- Q15. Quel est son rôle ?

Python

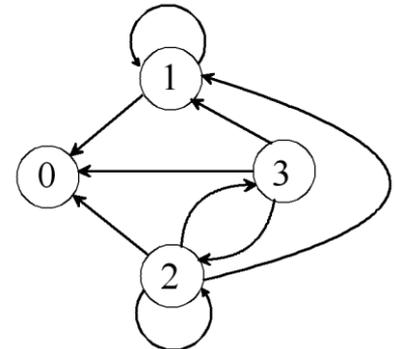
- Q16. Comment s'appelle la construction Python qui permet d'initialiser la matrice d'adjacence, ligne 11 du code ?
- Q17. Que fait l'instruction `[False]*n`

Mise en œuvre codage d'un graphe non orienté



Script_Graphe_1. Compléter le script pour décrire le graphe ci-dessous. (*Graphe identique à celui de la question Q7 mais avec les nœuds numérotés à partir de 0*)

Script_Graphe_1.py



Résultat attendus :

```
In [4]: g.adj
Out[4]:
[[False, False, False, False],
 [True, True, False, False],
 [True, True, True, True],
 [True, True, True, False]]
```

| | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | . | . | . | . |
| 1 | T | T | . | . |
| 2 | T | T | T | T |
| 3 | T | T | T | . |

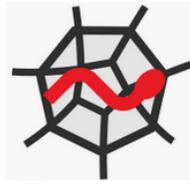
Amélioration impression de la matrice d'adjacence



Script_Graphe_2. Compléter le script 1 en ajoutant une méthode pour imprimer la matrice d'adjacence. Le format de l'impression est donné ci-dessus.

Script_Graphe_2.py





Ajout de la possibilité d'impression directement par print(objet)

Objet est un objet de la classe Graphe



Script_Graphe_3. Compléter le script précédent pour pouvoir imprimer la matrice d'adjacence directement en faisant `print(g)` où g est un graphe instancié par la Classe Graphe.  Script_Graphe_3.py



Exemple de résultat attendus :

Matrice d'adjacence

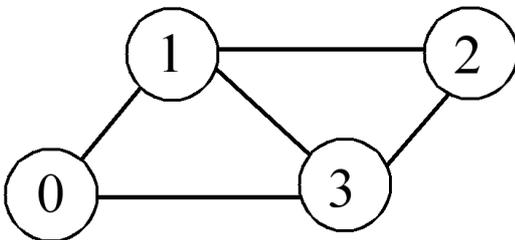
| | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | . | . | . | . |
| 1 | T | T | . | . |
| 2 | T | T | T | T |
| 3 | T | T | T | . |

Q18. Qu'est-ce qui différencient les deux fonctions d'impressions questions Q17 et Q18 ?

Ajout d'une arête (arc non orienté)



Script_Graphe_4. Ajouter une méthode permettant l'existence d'arêtes dans les graphes.  Script_Graphe_4.py



Matrice d'adjacence

| | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | . | T | . | T |
| 1 | T | . | T | T |
| 2 | . | T | . | T |
| 3 | T | T | T | . |

Graphe pondéré

Pour représenter cette catégorie de graphe il nous faut pouvoir utiliser la valeur infini ∞ pour indiquer l'absence de liaison entre deux nœuds.

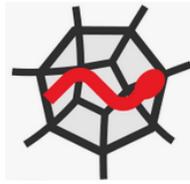
La valeur infini existe en Python :

```
In [7]: infini = float('inf')
```

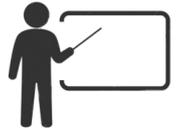
```
In [8]: infini
```

```
Out[8]: inf
```

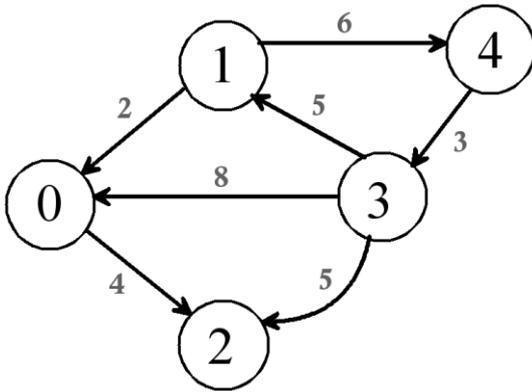




Script_Graphe_5. Créer une classe GraphePondere qui reprend toutes les méthodes précédemment utilisées mais adaptées à ce type de graphe. Créer le graphe ci-dessous.



Script_Graphe_5.py

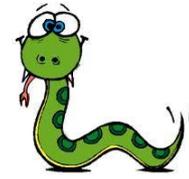
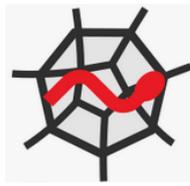


| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|
| 0 | inf | inf | T | inf | inf |
| 1 | T | inf | inf | inf | T |
| 2 | inf | inf | inf | inf | inf |
| 3 | T | T | T | inf | inf |
| 4 | inf | inf | inf | T | inf |

```
In [20]: g.arc(1,2)
Out[20]: inf
```

```
In [21]: g.arc(3,1)
Out[21]: 5
```

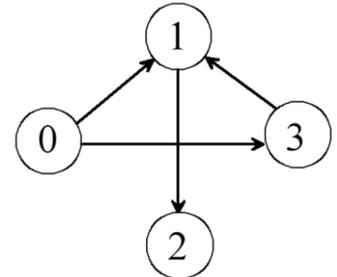




2.3 Représentation par dictionnaire d'adjacence

Principe de la représentation

Une autre solution pour représenter les graphes consiste à dresser une liste de tous les nœuds, avec pour chacun d'entre eux la liste des nœuds vers lesquels ils sont reliés. Prenons un exemple en analysant le graphe ci-dessous :



- Le nœud n°0 est relié aux nœuds 1 et 3,
- Le nœud n°1 est relié au nœud 2,
- Le nœud n°3 est relié au nœud 1.

En python nous utiliserons un dictionnaire pour décrire la liste de tous les nœuds du graphe, et un ensemble contenant la liste des nœuds destination des arcs comme valeur. Pour le graphe pris comme exemple voilà ce que cela donne :

```
In [35]: g.adj
Out[35]: {0: {1, 3}, 1: {2}, 2: set(), 3: {1}}
```

Avantage de cette représentation

La représentation de tous les nœuds du graphe par un dictionnaire permet de ne pas se restreindre à identifier ceux-ci uniquement par des numéros commençant par 0. Il est maintenant possible d'élargir les identifications.

Un exemple :

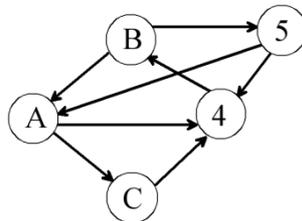


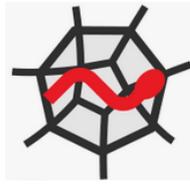
Table d'adjacence

- B -> A 5
- C -> 4
- A -> C 4
- 4 -> B
- 5 -> A 4

2.4 Les scripts Python

```
5 class Graphe:
6     """un graphe comme un dictionnaire d'adjacence"""
7
8     def __init__(self):
9         self.adj = {}
10
11     def ajouter_sommet(self, s):
12         if s not in self.adj:
13             self.adj[s] = set()
14
15     def ajouter_arc(self, s1, s2):
16         self.ajouter_sommet(s1)
17         self.ajouter_sommet(s2)
18         self.adj[s1].add(s2)
19
20     def arc(self, s1, s2):
21         return s2 in self.adj[s1]
22
23     def sommets(self):
24         return list(self.adj)
25
26     def voisins(self, s):
27         return self.adj[s]
```

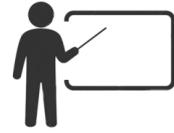




Mise en œuvre



Script_Graphe_6. A partir du script ci-dessous contenant la classe Graphe construite avec un dictionnaire d'adjacence compléter les méthodes d'impression. Les exemples de sorties sont indiquées page précédente.



 Script_Graphe_6.py

Nous pouvons reprendre le même travail de complément que celui fait dans le paragraphe 1 concernant la représentation par matrice d'adjacence.

Ajout d'une arête



Script_Graphe_7. Ajouter la possibilité de renseigner des arêtes entre deux nœuds.



 Script_Graphe_7.py

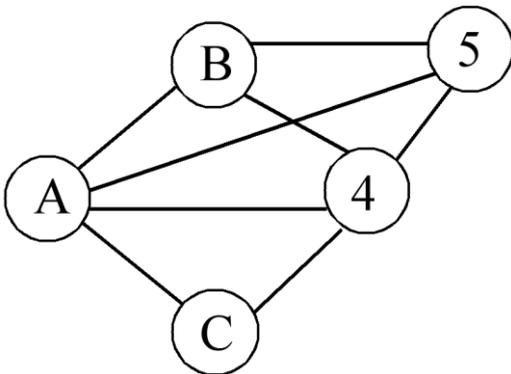
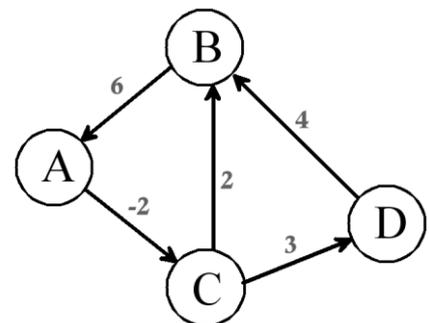


Table d'adjacence

```
B -> A 4 5
C -> A 4
A -> C 4 B 5
4 -> C A B 5
5 -> A B 4
```

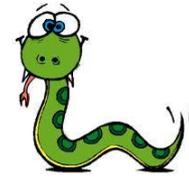
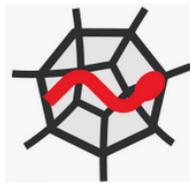
Graphe pondéré

Pour pouvoir représenter la valeur des arcs ou arêtes il nous faut améliorer notre représentation et utiliser maintenant un dictionnaire de dictionnaire :



```
In [4]: g.adj
Out[4]: {'A': {'C': -2}, 'D': {'B': 4}, 'C': {'D': 3, 'B': 2}, 'B': {'A': 6}}
```





Script_Graphe_8. Compléter le script pour
représenter des graphes pondérés.

 Script_Graphe_8.py



Quelques résultats attendus :

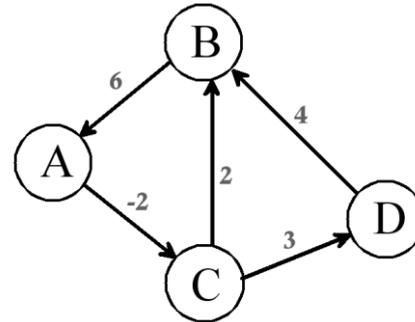
```
In [8]: g.arc('A','C')
Out[8]: True
```

```
In [9]: g.arc('A','D')
Out[9]: False
```

```
In [10]: g.sommets()
Out[10]: ['A', 'D', 'C', 'B']
```

```
In [22]: g.poids('A','C')
Out[22]: -2
```

```
In [23]: g.poids('A','D')
Out[23]: inf
```



```
In [15]: g.voisins('C')
Out[15]: {'B', 'D'}
```

```
In [13]: g.voisins('B')
Out[13]: {'A'}
```

2.5 Comparaison des deux implantations

Nous avons illustré nos implantations de graphe en Python avec deux procédés différents.

- Une représentation par matrice d'adjacence
- Une représentation par dictionnaire d'adjacence

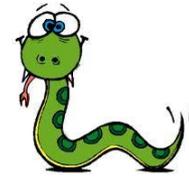
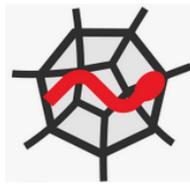
Ces deux représentations permettent de décrire tous les types de graphes orientés, non orientés ou bien pondérés. Elles ne sont pas totalement équivalentes.

La représentation avec matrice d'adjacence

Cette représentation est basée sur une matrice M de dimension $[n, n]$ où n est le nombre de nœuds du graphe, le remplissage de cette matrice avec des valeurs non nulles dépend du graphe. Elle est le plus souvent remplie de 0 ou ∞ les différents nœuds n'étant en général reliés qu'à quelques autres nœuds du graphe. L'occupation en mémoire peut donc être très grande.

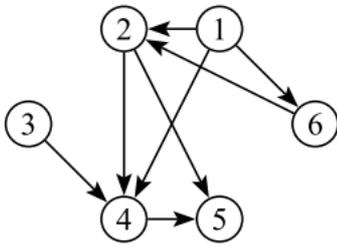
Cette représentation permet de déterminer simplement l'existence de chemins de longueur m entre deux nœuds en calculant M^2 pour des chemins de longueur 2, M^3 pour des chemins de longueur 3 etc ...





Illustration⁹

Voilà un graphe avec sa matrice d'adjacence, (les nœuds sont numérotés à partir de 1)



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vérifions l'existence de chemins de longueur 2 ou 3 :

- Q19.** Donner le ou les chemins de longueur 2 entre les nœuds
- 1 et 2 :
 - 6 et 4 :
 - 2 et 5 :
 - 1 et 5 :

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Q20.** Donner le ou les chemins de longueur 3 entre les nœuds
- 1 et 4 :
 - 6 et 5 :
 - 1 et 5 :

Excursus :

A titre indicatif si A, B sont deux matrices carrées de dimension [n, n] alors on note a_{ij} un élément de A, (i numéro de la ligne et j numéro de la colonne), B_{ij} un élément de B. Alors $C = A \cdot B$ est également une matrice de dimension [n, n].

C est défini par :
$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

Pour réaliser ce calcul il nous faut :

n^3 multiplications, $n^2(n - 1)$ additions.

La complexité du calcul sur la base de cette définition est en $O(n^3)$. Des algorithmes avancés existent actuellement la complexité¹⁰ la plus performante est en $n^{2,3727}$ en 2011.

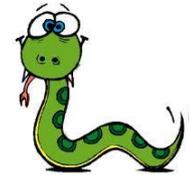
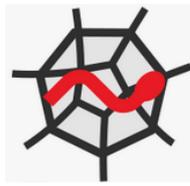
La représentation avec dictionnaire d'adjacence

Elle permet de représenter de très gros graphes en optimisant l'occupation en mémoire de celle-ci. La recherche dans les dictionnaires est en temps constant $O(1)$ en Python. Par contre le calcul des chemins comme précédemment n'est pas possible.



⁹ CAHIERS DE LA CRM, Introduction à la théorie des graphes, Didier Müller source internet.

¹⁰ <http://www.dptinfo.ens-cachan.fr/Conferences/Koiraan13.pdf>



3 Parcours de graphes¹¹

3.1 Présentation

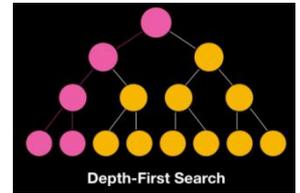
Parcours en profondeur (DFS : Depth-First Search)

L'exploration d'un parcours en profondeur depuis un sommet S fonctionne comme suit :

A partir d'un nœud de départ l'algorithme d'exploration poursuit un chemin dans le graphe jusqu'à un cul-de-sac ou alors jusqu'à atteindre un sommet déjà visité. Il revient alors sur le dernier sommet où on pouvait suivre un autre chemin puis reprend l'exploration.

Les sommets visités sont donc marqués au fur et à mesure de la progression.

L'exploration s'arrête quand tous les sommets depuis S ont été visités.

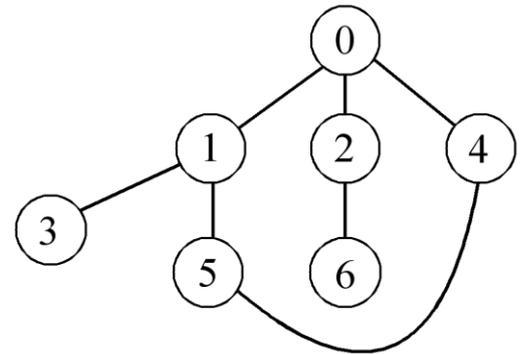


GIF

<https://www.youtube.com/watch?v=kcediJOiDpg>

Q21. Donner le parcours en profondeur à partir du nœud

- 0 :
- 2 :
- 5 :



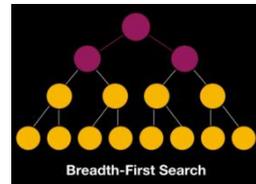
Note : Quand il y a plusieurs fils possibles à partir d'un nœud le chemin suivi dépend du choix de l'algorithme.

Parcours en largeur (Breadth First Search)

Le parcours en largeur explore le graphe couche par couche. Cela revient à s'éloigner progressivement du point de départ. Par rapport à ce point de départ la progression est 'horizontale'.

Pour réaliser ce fonctionnement les nœuds découverts sont mis dans une file au fur et à mesure et traités dans l'ordre de cette file ensuite.

<https://www.youtube.com/watch?v=NrQGxfMYzs>



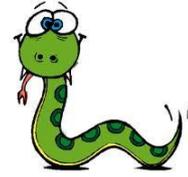
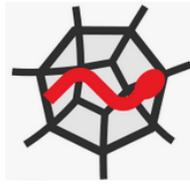
GIF

Q22. Donner le parcours en largeur à partir du nœud

- 0 :
- 2 :
- 5 :



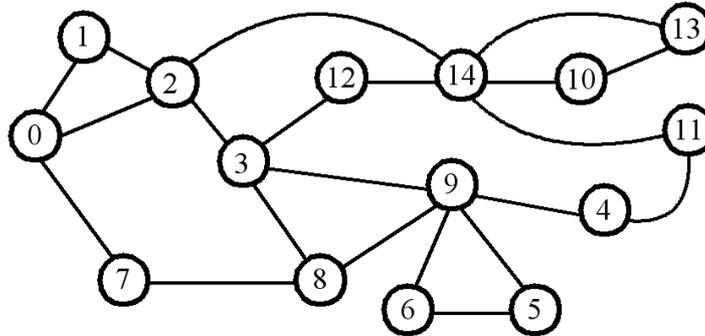
¹¹ Les sources diverses utilisées dans ce paragraphe sont indiquées dans la bibliographie.



3.2 Implémentation en Python

Le graphe d'étude

Le graphe ci-dessous sera utilisé pour tester nos algorithmes

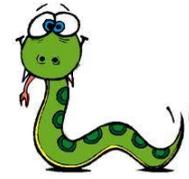
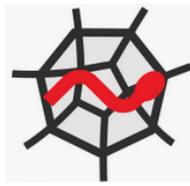


Version récursive du parcours en profondeur DFS

L'implémentation est basée sur l'utilisation de deux listes, une liste dénommée `visited` qui contient la liste des nœuds déjà visité du graphe. A la fin de l'algorithme cette liste contiendra les nœuds dans l'ordre du parcours. Une deuxième liste `unvisited` contient la liste des nœuds non encore visités à partir du nœud courant.

```
78 def recursive_dfs(graph, node, visited=None):
79     ...
80     Parcours en profondeur DFS
81     Implémentation récursive
82     Le fonctionnement est réalisé avec deux listes :
83     visited : contient la liste des noeuds déjà explorés
84     unvisited : donne la liste des noeuds non encore visité à partir
85                 du noeud courant.
86     ...
87     # Initialisation de la liste des sommets
88     # visités
89     if visited is None:
90         visited = []
91
92     # Si le noeud courant n'est pas dans la liste
93     # des noeuds visité on l'ajoute
94     if node not in visited:
95         visited.append(node)
96
97     # Liste des noeuds non encore visités à partir
98     # du noeud courant
99     unvisited = [n for n in g.voisins(node) if n not in visited]
100
101     # On poursuit en profondeur pour tous les noeuds
102     # restants à découvrir
103     for node in unvisited:
104         recursive_dfs(graph, node, visited)
105
106     # Retour du résultat
107     return visited
```





Script_Graphe_9. Complétez le script ci-dessous pour réaliser le parcours en profondeur du graphe en implémentation récursive.  Script_Graphe_9.py



Notez les résultats de vos parcours avec comme sommet de départ :

0 :

9 :

13 :

Version itérative du parcours en profondeur DFS

Le graphe est parcouru à partir du nœud de départ. Les nœuds visités sont stockés dans la liste `visited`. Pour chaque nœud visité la liste de tous ses fils non encore explorés est inséré dans une Pile de type LIFO. (Last In First Out le dernier enregistré est le premier à sortir).

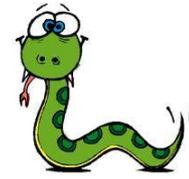
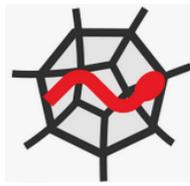
Le traitement se poursuit tant qu'il reste des nœuds dans la Pile. A noter que pendant le déroulement de l'exploration il est possible d'avoir plusieurs occurrences d'un même nœud dans la pile en fonction de la topologie du graphe et de l'ordre du parcours d'exploration réalisé. Cela n'a pas d'importance car quand l'élément au sommet de la Pile est prélevé pour être analysé, s'il est déjà visité à ce moment de l'algorithme de parcours, alors il est simplement ignoré et le processus de vidage de la Pile continue.

```

51 def iterative_dfs(graph, node):
52     '''
53     Parcours en profondeur DFS
54     Implémentation itérative.
55     Utilisation d'une Pile (stack en anglais) les successeurs du noeud en
56     cours d'analyse sont insérés dans la pile. La pile se vide au fur et à
57     mesure de la boucle non bornée while.
58     L'implantation de la pile repose sur le module Python collections.deque
59     Au fur et à mesure de leur découverte les noeuds sont ajoutés à la liste
60     visited qui est renvoyée en résultat
61     '''
62     # Initialisations
63     visited = []
64     stack = deque()
65     stack.append(node)
66
67     # Tant que la Pile n'est pas vide
68     while stack:
69         # On extrait l'élément de droite de la pile
70         node = stack.pop()
71         # Si le noeud extrait n'est pas déjà visité
72         if node not in visited:
73             # On l'ajoute à la liste des noeuds visités
74             visited.append(node)
75             # On établit la liste des neouds fils non encore
76             # visités
77             unvisited = [n for n in g.voisins(node) if n not in visited]
78             # On insère cette liste dans la Pile
79             stack.extend(unvisited)
80
81     # Retour du résultat
82     return visited

```





Script_Graphe_10. Complétez le script ci-dessous pour réaliser le parcours en profondeur du graphe en implémentation itérative.  Script_Graphe_10.py



Notez les résultats de vos parcours avec comme sommet de départ :

0 :
9 :
13 :

Q23. Expliquez pourquoi les deux algorithmes ne donnent pas les nœuds dans le même ordre.

3.3 Parcours en largeur ou BFS

Version itérative

```

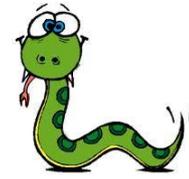
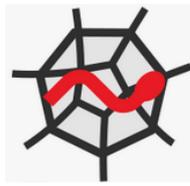
143 def iterative_bfs(graph, start):
144     """
145     Parcours en largeur du graphe.
146     Les noeuds découverts sont stockés dans une file (queue en anglais) FIFO
147     First In First Out et donc ils sont traités par couche
148     s'éloignant du noeud de départ de manière concentrique.
149     L'implantation de la file repose sur le module Python collections.deque
150     Le fonctionnement de la file est obtenu en prélevant les données du coté
151     gauche.
152     """
153
154     # Initialisation
155     visited = []
156     queue = deque()
157     queue.append(start)
158
159     # Tant que la file n'est pas vide
160     while queue:
161         # On récupère un élément à gauche, coté sortie de la FIFO
162         node = queue.popleft()
163         # Si le noeud extrait n'est pas déjà visité
164         if node not in visited:
165             # On l'ajoute à la liste des noeuds visités
166             visited.append(node)
167             # On établit la liste des neuds fils non encore
168             # visités
169             unvisited = [n for n in g.voisins(node) if n not in visited]
170             # On insère cette liste dans la File
171             queue.extend(unvisited)
172
173     # Retour du résultat
174     return visited

```



Script_Graphe_11. Complétez le script ci-dessous pour réaliser le parcours en largeur du graphe en implémentation itérative.  Script_Graphe_11.py

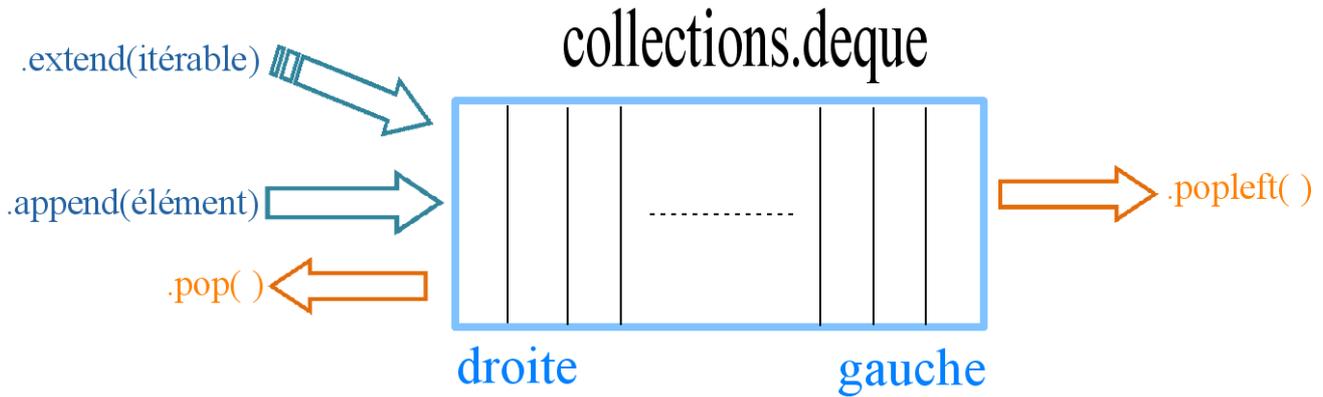




Notez les résultats de vos parcours avec comme nœud de départ :

- 0 :
- 9 :
- 13 :

3.4 L'objet collections.deque



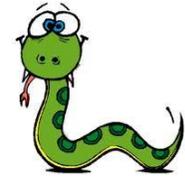
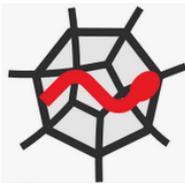
Fonctionnement en Pile LIFO (Parcours en Profondeur)

| | |
|---|---------------------------------|
| En entrée | En sortie le dernier rentré |
| Coté droit <code>.extend()</code> ou <code>.append()</code> | Coté droit <code>.pop()</code> |

Fonctionnement en File FIFO (Parcours en Largeur)

| | |
|---|--------------------------------------|
| En entrée | En sortie le premier rentré |
| Coté droit <code>.extend()</code> ou <code>.append()</code> | Coté gauche <code>.popleft()</code> |





3.5 Exercices

Parcours de graphes

