

Analyse et mise en œuvre de tris de tables

Résumé :



Un algorithme de **tri** est, en **informatique** ou en mathématiques, un algorithme qui permet d'organiser une collection d'objets selon une relation d'ordre déterminée. Les objets à **trier** sont des éléments d'un ensemble muni d'un ordre total.

[Algorithme de tri — Wikipédia](https://fr.wikipedia.org/wiki/Algorithme_de_tri)

https://fr.wikipedia.org/wiki/Algorithme_de_tri

Les réponses aux questions posées seront données dans le document réponse joint.

Sommaire :

1	Le tri par sélection	2
1.1	<i>Découverte de l'algorithme</i>	2
1.2	<i>Description de l'algorithme en pseudo code</i>	3
1.3	<i>Codage et essai en python</i>	4
1.4	<i>Étude expérimentale de la complexité de l'algorithme</i>	4
1.5	<i>Réflexion sur la complexité</i>	4
2	Le tri par insertion	5
2.1	<i>Description de l'algorithme en pseudo code</i>	6
2.2	<i>Analyse théorique de la complexité</i>	7
2.3	<i>Analyse expérimentale de la complexité</i>	8
3	Deux définitions : le tri en place et le tri stable.	8
3.1	<i>Le tri stable</i>	8
3.2	<i>Le tri en place</i>	8
3.3	<i>Quid de nos algorithmes de tris par sélection et fusion ?</i>	8
4	En complément un autre exemple de tri : le tri à bulles	8
4.1	<i>Description de l'algorithme</i>	8
4.2	<i>L'algorithme en pseudo code</i>	10
4.3	<i>Codage de l'algorithme en Python</i>	10
4.4	<i>Analyse expérimentale de la complexité</i>	10



1 Le tri par sélection

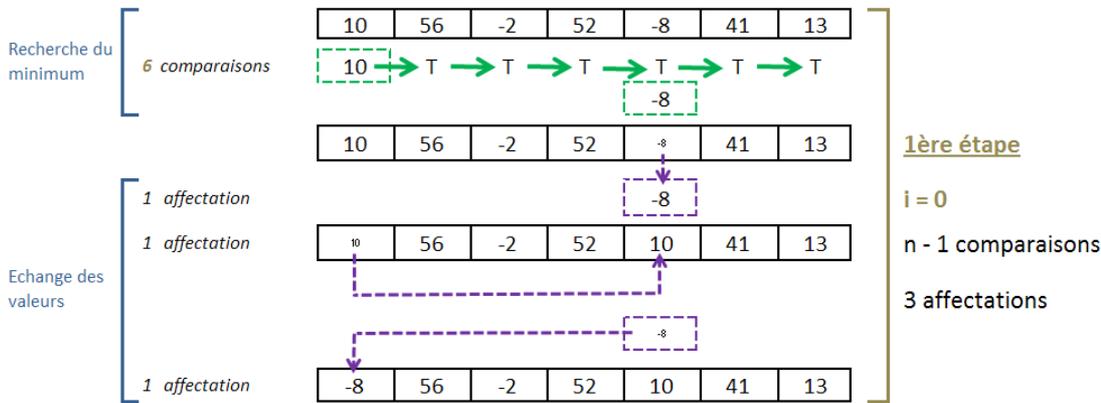
1.1 Découverte de l'algorithme

Pour découvrir l'algorithme analysons le schéma de fonctionnement ci-dessous.

n valeurs						
0	1	2	3	4	5	n - 1
10	56	-2	52	-8	41	13

Nous partons d'une table avec $n = 7$ valeurs :

Première étape :

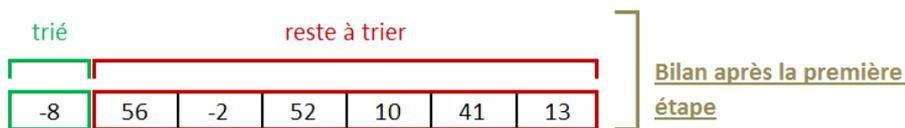


Commentaires :

a) on débute notre travail de tri avec la première case du tableau ici elle contient la valeur 10. Puis on recherche dans les cases restantes la plus petite valeur qui est inférieure à 10. C'est la valeur -8. Cette recherche nous coûte 6 comparaisons.

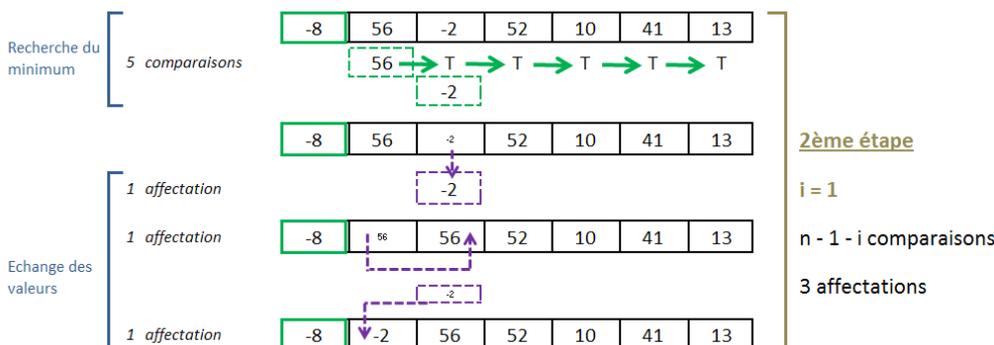
b) si la valeur existe, ici oui c'est -8, alors on procède à l'échange entre les cases du tableau contenant les valeurs 10 et -8, cette opération nous coûte 3 affectations.

Voilà l'état de notre tri après cette première étape :



Deuxième étape du tri :

La première case est triée alors on la laisse de côté et on recommence le même processus que précédemment à partir de la case suivante, ici elle contient 56.



Commentaires :

a) Quelle est la valeur plus petite restante c'est -2 cette recherche nous coûte 5 comparaisons.

b) Il nous faut échanger les valeurs 52 et -2 cela nous coûte 3 affectations.

Voilà l'état de notre tri après la deuxième étape :



Pour terminer le tri il faut recommencer cette procédure pour $i = 2$ jusqu'à $i = n - 2$ soit l'avant dernière case. Pour la dernière étape il nous restera à comparer l'avant dernière case du tableau (indice $n-2$) avec la dernière (indice $n-1$).

 Q1. Faire fonctionner la suite du tri à la main, la première étape a déjà été réalisée, compléter le tableau sur la feuille réponse :

10	56	-2	52	-8	41	13
-8	56	-2	52	10	41	13

1.2 Description de l'algorithme en pseudo code¹

On considère un tableau $t []$ de n éléments numérotés de 0 à $n-1$. L'objectif consiste à réaliser le tri par sélection de ce tableau. Voilà l'algorithme en pseudo code :

```
pour i de 0 à n - 2
  min ← i
  pour j de i + 1 à n - 1
    si t [ j ] < t [ min ], alors
      min ← j
    fin si
  fin pour
  si min ≠ i, alors
    échanger t [ i ] et t [ min ]
  fin si
fin pour
```



¹ Source : https://fr.wikipedia.org/wiki/Tri_par_sélection

1.3 Codage et essai en python



Script1. Coder l'algorithme de tri par sélection en Python en complétant  tri par selection depart eleve 2024.py

1.4 Étude expérimentale de la complexité de l'algorithme

Faites fonctionner votre script avec des listes contenant beaucoup de valeurs pour pouvoir ensuite étudier expérimentalement la complexité de l'algorithme. Pour l'appel la mesure du temps de calcul est indiquée au paragraphe 5.1.



Script2. Faites fonctionner votre algorithme et remplir le tableau suivant :

Tri par sélection en S

n valeurs	5000	10000	15000	20000	25000	30000
Durée						

1.5 Réflexion sur la complexité

a) Étude pratique

La classification de la complexité algorithmique est illustrée d'une manière utilitaire dans la table ci-dessous :

Complexité	Nom courant	Temps quand on double la taille de l'entrée	Max n
$O(n)$	linéaire	prend 2 fois plus de temps	10^{12}
$O(1)$	constant	prend le même temps	pas de limite
$O(n^2)$	quadratique	prend 4 fois plus de temps	10^6
$O(n^3)$	cubique	prend 8 fois plus de temps	10 000
$O(\log n)$	logarithmique	prend seulement une étape de plus	$10^{10^{12}}$
$O(n \log n)$	linearithmique	prend deux fois plus de temps + $\log n$	10^{11}
$O(2^n)$	exponentiel	prend tellement de temps que c'est inconcevable	30

 Q2. En exploitant vos résultats précédents, donner une indication sur la complexité de l'algorithme de tri par sélection.

b) Étude théorique²

Nous observons que notre algorithme est organisé en deux boucles for imbriquées. Pour réaliser l'étude théorique de sa complexité nous allons l'étudier en considérant l'opération de comparaison :

$$\text{si } t[j] < t[\text{min}], \text{ alors } \text{min} \leftarrow j$$

La première boucle fonctionnant avec l'indice i est exécutée $(n - 2) - 0 + 1 \Leftrightarrow$ soit $n - 1$ fois.

La deuxième boucle fonctionnant sur l'indice j est exécutée de $(n - 1) - (i + 1) + 1 \Leftrightarrow$ Soit $(n - i - 1)$ fois.

² En complément voir l'étude ici : <https://rmdiscala.developpez.com/cours/LesChapitres.html/Cours4/TPSchap4.6.htm>.

L'opération de comparaison est à l'intérieur de la deuxième boucle elle est donc exécutée :

- Pour le premier passage $i = 0 \Leftrightarrow (n - 1)$ fois
- Pour le passage suivant $i = 1 \Leftrightarrow (n - 2)$ fois
et ainsi de suite
- Jusqu'au dernier passage où $i = n - 2 \Leftrightarrow (n - (n - 2) - 1) = 1$

Le nombre total de test est égal à la somme $(n-1) + (n-2) + (n-3) + \dots + 1 = n(n-1) / 2$
(Somme des $n-1$ premiers entiers). La complexité de l'algorithme est en $O(n^2)$.

2 Le tri par insertion

(Le tri des joueurs de cartes)



La situation de départ une liste de valeurs à trier, ici 7.

n valeurs						
0	1	2	3	4	5	n - 1
0	1	2	3	4	5	6
10	56	-2	52	-8	41	13

La première étape consiste à couper la liste en deux parties :

triée	reste à trier					
10	56	-2	52	-8	41	13

Ensuite on prend les éléments dans la zone 'reste à trier' un par un et on les insère à la bonne place :

triée	reste à trier					
10	56	-2	52	-8	41	13

triée	reste à trier					
-2	10	56	52	-8	41	13

triée	reste à trier					
-2	10	52	56	-8	41	13

On insère 56 à la bonne place

Et ensuite -2

Et ensuite 52



Et ainsi de suite jusqu'au résultat final toute la liste est triée :



-8	-2	10	13	41	52	56
----	----	----	----	----	----	----

Je l'avais dit mais on ne m'écoute jamais !!

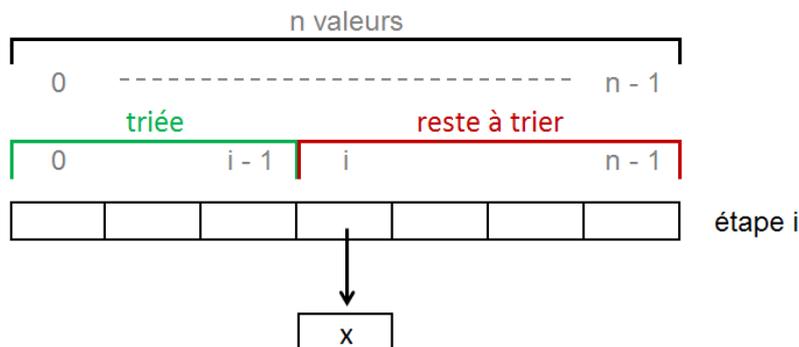


2.1 Description de l'algorithme en pseudo code³

On considère un tableau $t[]$ de n éléments numérotés de 0 à $n-1$. L'objectif consiste à réaliser le tri par sélection de ce tableau. Voilà l'algorithme en pseudo code :

```
pour i de 1 à n - 1
    # mémoriser T[ i ] dans x
    x ← T[ i ]
    # décaler vers la droite les éléments T[ 0 ] ..T[ i - 1 ]
    # qui sont plus grands que x en partant de T[ i - 1 ]
    j ← i
    tant que j > 0 et T[ j - 1 ] > x
        T[ j ] ← T[ j - 1 ]
        j ← j - 1
    fin tant que
    # placer x dans le "trou" laissé par le décalage
    T[ j ] ← x
fin pour
```

On peut résumer la situation au début de l'étape n^o qui réalise le placement de l'élément n^o de la liste dans la partie de la liste triée :



Script3. Compléter le script Python [tri par insertion depart eleve 2024.py](#) pour réaliser un tri par insertion d'une liste.

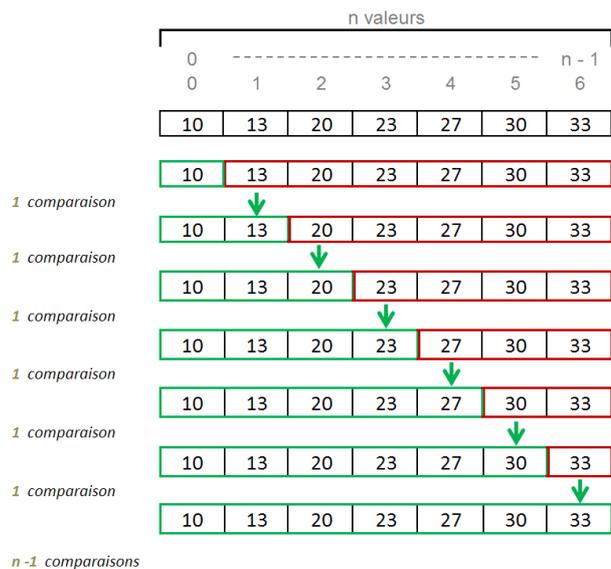


³ Source : https://fr.wikipedia.org/wiki/Tri_par_sélection

2.2 Analyse théorique de la complexité

En préambule que se passe-t-il si nous cherchons à trier un tableau de n éléments déjà triés ?

Étudions le cas sur un exemple :



Notre table contenant n valeurs est déjà triée. **C'est le cas le plus favorable.**

Nous pouvons analyser que l'algorithme par insertion réalise $n - 1$ comparaisons pour finalement ne rien faire de plus.

La complexité de cet algorithme est donc en $O(n)$ dans ce cas.

Et maintenant qu'en est-il du cas le plus défavorable ?



Notre table contenant n valeurs est déjà triée mais à l'envers ! **C'est le cas le plus défavorable.**

Nous pouvons analyser l'algorithme en comptabilisant les opérations nous obtenons :

Pour l'étape $n^o i$: i comparaison + i affectation + 2 affectations

Pour l'ensemble des étapes i varie entre $1..n-1$ donc en additionnant l'ensemble des opérations nous trouvons :

$$\frac{n(n-1)}{2}(\text{comparaison} + \text{affectation}) + 2(n-1)\text{affectation}$$

La complexité de cet algorithme est donc en $O(n^2)$ dans ce cas.



2.3 Analyse expérimentale de la complexité

Analyse pour le cas défavorable

Pour remplir la table dans l'ordre inverse avec 4000 éléments par exemple :

```
table_a_trier = [4000-i for i in range(4000)]
```

 Q3. Vérifier expérimentalement que le comportement de l'algorithme dans le cas défavorable est bien d'une complexité en $O(n^2)$.

Tri par insertion cas défavorable en S

n valeurs	5000	10000	15000	20000	25000	30000
Durée						

3 Deux définitions : le tri en place et le tri stable.

3.1 Le tri stable

On appelle **tri stable** un tri qui conserve l'ordre d'apparition des éléments égaux.

3.2 Le tri en place

On appelle **tri en place** un tri qui n'utilise pas de tableau auxiliaire.

3.3 Quid de nos algorithmes de tris par sélection et fusion ?

Le tri par sélection est un tri en place, il peut être stable selon les détails d'implémentations. Le tri par insertion est un tri stable et en place.



4 En complément un autre exemple de tri : le tri à bulles

4.1 Description de l'algorithme

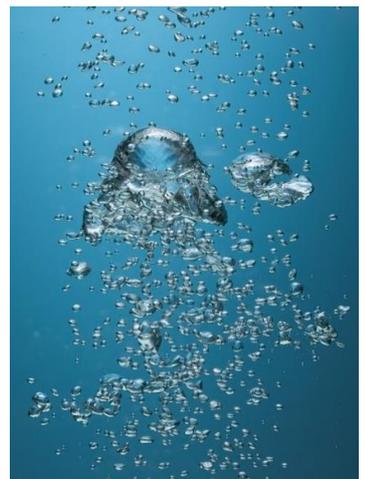
Le tri à bulle est ainsi nommé car il reprend l'idée des bulles qui remontent à la surface d'un cours d'eau ou bien d'une marre. Dans notre algorithme il s'agit de comparer deux à deux les valeurs de notre table et de les échanger si elles ne sont pas dans l'ordre requis.

On réalisera plusieurs passes successives jusqu'à ce qu'il n'y ait plus aucun échange ce qui signifiera que la table est triée.

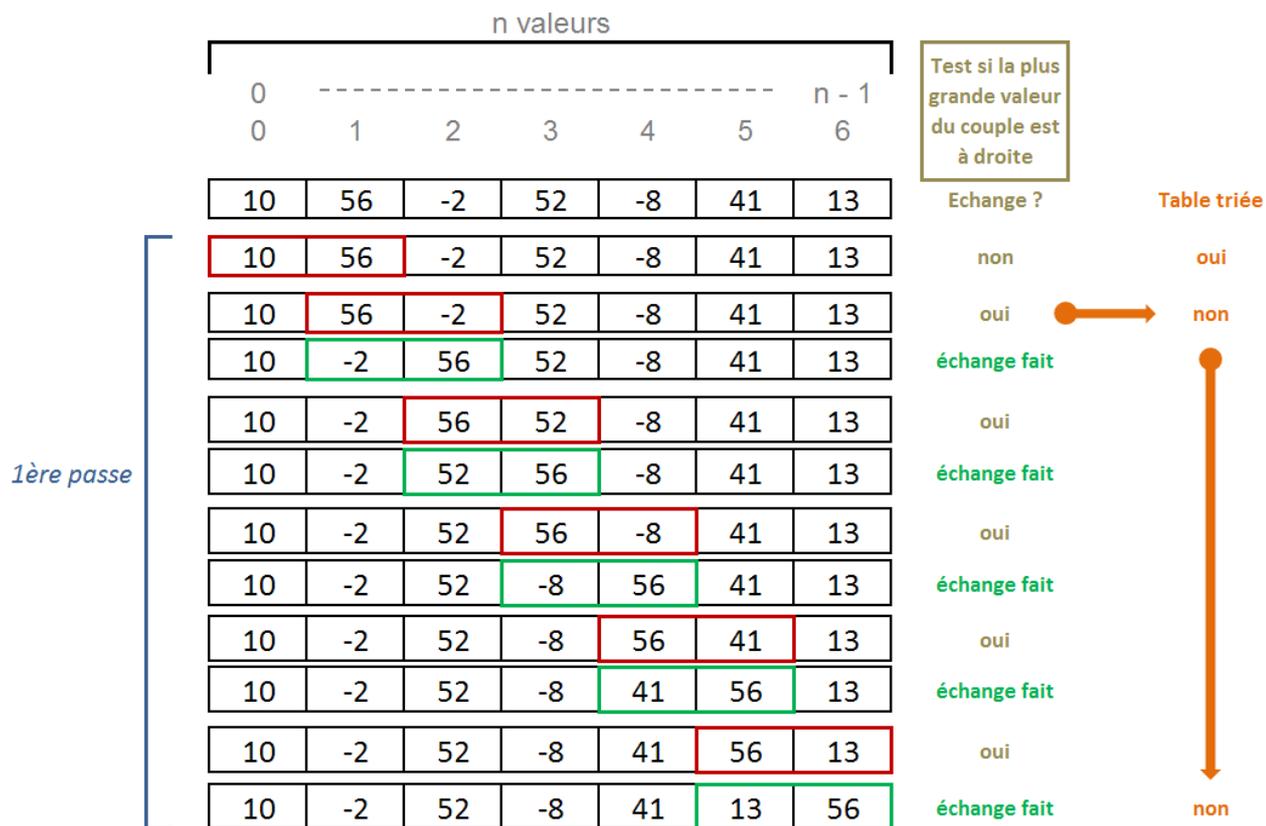
Sens des tests successifs



10	56	-2	52	-8	41	13
----	----	----	----	----	----	----



Voilà la première passe sur notre table :



Commentaires :

a) on voit bien que la valeur 56 qui est dans la case n°1 du tableau va remonter de proche en proche jusqu'à la case la plus à droite car elle a la valeur la plus élevée. C'est bien à l'image d'une bulle qui remonte tranquillement vers la surface (ici le coté droit).

b) à chaque analyse d'une paire de valeurs cote à cote on mémorise le fait qu'il y ait besoin d'effectuer un échange. Et dans ce cas la table n'est pas triée l'indicateur est mis à NON.

c) c'est seulement quand dans une phase aucun échange n'est nécessaire que la table est triée.

Q4. En observant la table ci-dessous que l'on veut trier avec les valeurs les plus élevées à droite. Indiquer combien d'échanges vont être réalisés sur une passe de l'algorithme.

-10	24	-2	-12	30	41	13
-----	----	----	-----	----	----	----

Q5. Même question pour celle-ci ?

-4	0	1	12	21	34	43
----	---	---	----	----	----	----



4.2 L'algorithme en pseudo code

On considère un tableau $t []$ de n éléments numérotés de 0 à $n-1$ le pseudo algorithme du tri à bulles est donné ci-dessous :

```
flag ← faux
faire tant que flag=faux
  flag ← vrai
  pour i allant de 0 à n - 2
    si  $t [ i + 1 ] < t [ i ]$  alors
      échanger(  $t [ i + 1 ]$ ,  $t [ i ]$  )
      flag ← faux
    fin si
  fin pour
fin tant que
```

 Q6. Faire fonctionner à la main : compléter le tableau ci-dessous :

10	56	-2	52	-8	41	13
10	-2	52	-8	41	13	56

4.3 Codage de l'algorithme en Python



Script4. Compléter l'algorithme du tri à bulles en Python.

 tri a bulles depart eleve 2024.py

4.4 Analyse expérimentale de la complexité

 Q7. Remplir le tableau ci-dessous puis vérifier que la complexité de l'algorithme de tri à bulles est bien en $O(n^2)$.

Tri à bulles en S

n valeurs	5000	10000	15000	20000	25000	30000
Durée						

