Fondements logiques exercices

1 Logique propositionnelle

$((p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg p) \wedge r$

1°. Introduction (brève)

La logique propositionnelle est une logique fondée sur des propositions ne possédant que deux valeurs de vérité : soit une proposition est vraie soit elle est fausse. Cette forme de logique est très utilisée puisqu'elle permet de modéliser les circuits combinatoires à la base de l'informatique d'aujourd'hui mais elle permet également de modéliser le raisonnement logique et ainsi aboutir à l'obtention de la correction automatique de programmes par vérification formelle (sans exécuter ceux-ci, uniquement en analysant le texte du code), ou bien représenter des connaissances mathématiques permettant la mise en œuvre d'algorithmes de prise de décisions, d'exécution de requêtes SQL dans les bases de données ou bien d'intelligence artificielle[1].

Les deux valeurs possibles sont vrai noté : $\top$ et faux noté : $\perp$

Les propositions sont notées avec des lettres minuscules par exemple :

p : j'ai faim   q : je mange un gateau   r : j'ai soif   s : je bois

Il nous est possible d'écrire des énoncés en combinant des propositions avec des relations appelées connecteurs, ils sont au nombre de cinq :

la négation	¬	¬ p	je n'ai pas faim
la conjonction	∧	p ∧ q	j'ai faim et j'ai soif
la disjonction	∨	q ∨ s	Je mange un gateau ou je bois
l'implication, ou conditionnelle	⇒	p ⇒ q	Si j'ai faim alors je mange un gateau
l'équivalence ou biconditionnelle	⇔	p ⇔ q	J'ai faim est équivalent à je bois J'ai faim si et seulement si je bois

[1] Logique et démonstration automatique, S. DEVISMES P. LAFOURCADE M. LEVY, Technosup Ellipses, 2012, Avant propos.

2°. Table de vérité

Nous pouvons décrire le comportement attendu de ces cinq connecteurs avec des tables de vérité qui donnent la réponse à tous les cas possibles :

Table de vérité de la négation

p	$\neg p$
V	**F**
F	**V**

Table de vérité de la conjonction

p	q	$p \wedge q$
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**F**
F	F	**F**

Table de vérité de la disjonction

p	q	$p \vee q$
V	V	**V**
V	F	**V**
F	V	**V**
F	F	**F**

Table de vérité de la conditionnelle

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**V**
F	F	**V**

Table de vérité de la biconditionnelle

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**F**
F	F	**V**

3°. Quelques règles d'interprétation

Les connecteurs suivent des règles de priorité comme les opérations algébriques donc dans l'ordre des priorités décroissantes :

$\neg$ (négation) ; $\wedge$ (conjonction ET) ; $\vee$ (disjonction OU) ; $\Rightarrow$ (implication) ; $\Leftrightarrow$ (équivalence)

4°. Nous avons les équivalences :

Pour la disjonction : $x \vee (y \vee z) \equiv (x \vee y) \vee z$ $\quad x \vee y \equiv y \vee x$ $\quad 0 \vee x \equiv x$ $\quad 1 \vee x \equiv 1$ $\quad x \vee x \equiv x$

Pour la conjonction : $x \wedge (y \wedge z) \equiv (x \wedge y) \wedge z$ $\quad x \wedge y \equiv y \wedge x$ $\quad 1 \wedge x \equiv x$ $\quad 0 \wedge x \equiv 0$ $\quad x \wedge x \equiv x$

Distributivité : $x \wedge (y \vee z) \equiv (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ $\quad x \vee (y \wedge z) \equiv (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

Avec la négation : $x \wedge \neg x \equiv 0$ $\quad x \vee \neg x \equiv 1$ $\quad \neg\neg x \equiv x$ $\quad \neg 0 \equiv 1$ $\quad \neg 1 \equiv 0$

Lois de De Morgan : $\neg (x \vee y) \equiv \neg x \wedge \neg y$ $\quad \neg (x \wedge y) \equiv \neg x \vee \neg y$

2 Expressions simples

<u>Représentation d'informations énoncé n°1</u>

En notant M et C les affirmations suivantes :

- M = « Jean est fort en Maths »,
- C = « Jean est fort en Chimie »,

Représenter les affirmations qui suivent sous forme symbolique, à l'aide des lettres M et C et des connecteurs usuels : $\wedge$ (et) ; $\vee$ (ou) ; $\Rightarrow$ (si … alors) ; $\neg$ (non)

1. « Jean est fort en Maths mais faible en Chimie »

2. « Jean n'est fort ni en Maths ni en Chimie »

3. « Jean est fort en Maths ou il est à la fois fort en Chimie et faible en Maths »

4. « Jean est fort en Maths s'il est fort en Chimie »

5. « Jean est fort en Chimie et en Maths ou il est fort en Chimie et faible en Maths »

Expressions simples

<u>Représentation d'informations énoncé n°2</u>

En notant M, C et A les trois affirmations suivantes :

- M = « Pierre fait des Maths » ;
- C = « Pierre fait de la Chimie » ;
- A = « Pierre fait de l'Anglais ».

Représenter les affirmations qui suivent sous forme symbolique, à l'aide des lettres M, C, A et des connecteurs usuels.

1. « Pierre fait des Maths et de l'Anglais mais pas de Chimie »

2. « Pierre fait des Maths et de la Chimie mais pas à la fois de la Chimie et de l'Anglais »

3. « Il est faux que Pierre fasse de l'Anglais sans faire de Maths »

4. « Il est faux que Pierre ne fasse pas des Maths et fasse quand même de la chimie »

5. « Il est faux que Pierre fasse de l'Anglais ou de la Chimie sans faire des Maths »

6. « Pierre ne fait ni Anglais ni Chimie mais il fait des Maths »

Expressions simples

<u>Représentation d'informations énoncé n°3</u>

Avec les propositions suivantes :

J : Jean prend le café
P : Pierre prend le café
G : Gustave prend le café
D : Jean a dîné
E : Gustave a dîné
F : Pierre a dîné

<u>Traduire les propositions suivantes :</u>

1. Jean et Pierre prirent le café et Gustave fit de même.

2. Jean prit le café, et Pierre ou Gustave aussi

3. Jean et Pierre ont dîné tous les deux, ou bien Jean et Gustave prirent le café

4. Jean a dîné, ainsi que Gustave ou Pierre.