Fondements logiques

Ce DM est constitué d'une première partie introduisant des exercices qui seuls seront à rendre après rédaction sur la deuxième partie du document.

1 Logique propositionnelle

$((p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg p) \wedge r$

1.1 Introduction (brève)

La logique propositionnelle est une logique fondée sur des propositions ne possédant que deux valeurs de vérité : soit une proposition est vraie soit elle est fausse. Cette forme de logique est très utilisée puisqu'elle permet de modéliser les circuits combinatoires à la base de l'informatique d'aujourd'hui mais elle permet également de modéliser le raisonnement logique et ainsi aboutir à l'obtention de la correction automatique de programmes par vérification formelle (sans exécuter ceux-ci, uniquement en analysant le texte du code), ou bien représenter des connaissances mathématiques permettant la mise en œuvre d'algorithmes de prise de décisions ou bien d'intelligence artificielle[1].

Les deux valeurs possibles sont vrai noté : T et faux noté : $\bot$

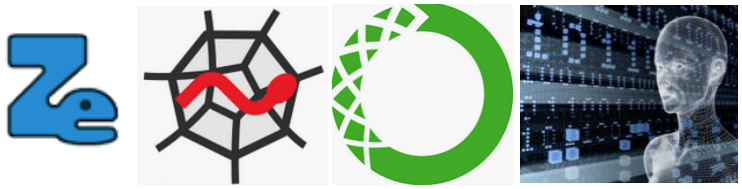
Les propositions sont notées avec des lettres minuscules par exemple :

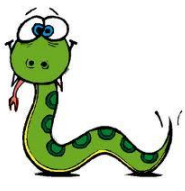
p : j'ai faim q : je mange un gateau r : j'ai soif s : je bois

Il nous est possible d'écrire des énoncés en combinant des propositions avec des relations appelées connecteurs, ils sont au nombre de cinq :

la négation	¬	¬ p	je n'ai pas faim
la conjonction	∧	p ∧ q	j'ai faim et j'ai soif
la disjonction	∨	q ∨ s	Je mange un gateau ou je bois
l'implication, ou conditionnelle	⇒	p ⇒ q	Si j'ai faim alors je mange un gateau
l'équivalence ou biconditionnelle	⇔	p ⇔ q	J'ai faim est équivalent à je bois J'ai faim si et seulement si je bois

[1] Logique et démonstration automatique, S. DEVISMES P. LAFOURCADE M. LEVY, Technosup Ellipses, 2012, Avant propos.





1.2 Table de vérité

Nous pouvons décrire le comportement attendu de ces cinq connecteurs avec des tables de vérité qui donnent la réponse à tous les cas possibles :

Table de vérité de la négation

p	$\neg p$
V	**F**
F	**V**

Table de vérité de la conjonction

p	q	$p \wedge q$
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**F**
F	F	**F**

Table de vérité de la disjonction

p	q	$p \vee q$
V	V	**V**
V	F	**V**
F	V	**V**
F	F	**F**

Table de vérité de la conditionnelle

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**V**
F	F	**V**

Table de vérité de la biconditionnelle

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**F**
F	F	**V**

1.3 Quelques règles d'interprétation

Les connecteurs suivent des règles de priorité comme les opérations algébriques donc dans l'ordre des priorités décroissantes :

¬ (négation) ; ⋀ (conjonction ET) ; ⋁ (disjonction OU) ; ⇒ (implication) ; ⇔ (équivalence)

1.4 Nous avons les équivalences :

Pour la disjonction : $x \vee (y \vee z) \equiv (x \vee y) \vee z$ $x \vee y \equiv y \vee x$ $0 \vee x \equiv x$ $1 \vee x \equiv 1$ $x \vee x \equiv x$

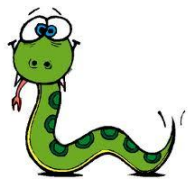
Pour la conjonction : $x \wedge (y \wedge z) \equiv (x \wedge y) \wedge z$ $x \wedge y \equiv y \wedge x$ $1 \wedge x \equiv x$ $0 \wedge x \equiv 0$ $x \wedge x \equiv x$

Distributivité : $x \wedge (y \vee z) \equiv (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ $x \vee (y \wedge z) \equiv (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

Avec la négation : $x \wedge \neg x \equiv 0$ $x \vee \neg x \equiv 1$ $\neg\neg x \equiv x$ $\neg 0 \equiv 1$ $\neg 1 \equiv 0$

Lois de De Morgan : $\neg (x \vee y) \equiv \neg x \wedge \neg y$ $\neg (x \wedge y) \equiv \neg x \vee \neg y$

Ces règles seront utilisées dans la résolution d'un énoncé de logique :

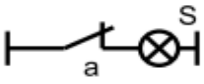
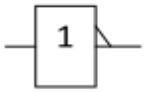
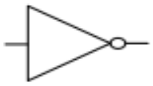
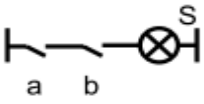
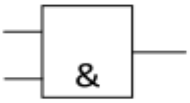
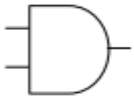
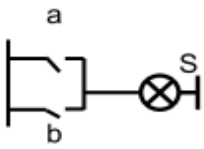
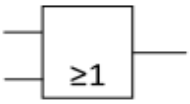
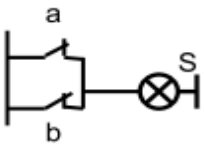
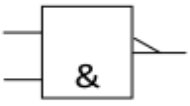
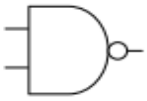
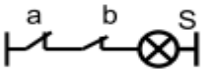
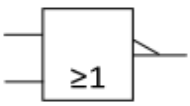
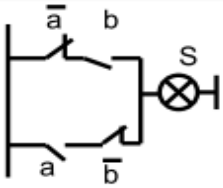
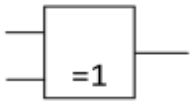


2 La logique combinatoire les opérateurs de bases

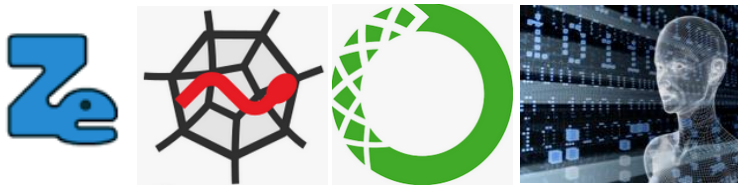
2.1 Les opérateurs logiques de bases

La logique combinatoire est une logique réalisée avec des circuits électroniques. Dans ces circuits les deux valeurs vrai ⊤ et faux ⊥ sont notées 1 et 0. Dans la réalité technologiques ces deux niveaux sont représentés par des valeurs de tensions sur les broches de sorties des composants logiques. Les valeurs numériques de ces niveaux dépendent de la technologie de ces circuits. Dépendent également de la technologie retenue la rapidité des composants et la consommation électrique.

Nous retrouvons les trois opérateurs de bases de cette logique à savoir le ET le OU et l'inverseur :

Nom de la fonction	Schéma électrique	Table de vérité	représentation -norme européenne-	représentation -norme américaine-	équation
NON inverseur		a S 0 1 1 0			$S = \overline{a}$
ET		a b S 0 0 0 0 1 0 1 0 0 1 1 1			S = a . b
OU		a b S 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1 1			S = a + b
NON ET		a b S 0 0 1 0 1 1 1 0 1 1 1 0			$S = \overline{a.b}$
NON OU		a b S 0 0 1 0 1 0 1 0 0 1 1 0			$S = \overline{a+b}$
OU Exclusif		a b S 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1 0			$S = a \oplus b$

Note : la technologie met à disposition des opérateurs à plusieurs entrées, sauf pour l'inverseur. Soit sous la forme de circuits spécifiques soit sous la forme de synthèse directe dans des composants entièrement configurables tels que les PAL, PLD, FPGA, ou bien les blocs internes UDB des circuits PSoC de Cypress. Dans ce dernier cas les descriptions des hardwares logiques sont réalisées en schéma logique et / ou en saisie texte avec des langages de haut niveau tel que le VERILOG ou bien le VHDL.



2.2 Mise en équation des tables de vérité.

Les tables de vérités décrivent complètement la résolution à un problème donné. Il est possible d'obtenir la fonction logique de la manière suivante, ci-dessous un exemple pour le ou exclusif :

a	b	a xor b
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$S = \overline{a} \cdot b + a \cdot \overline{b}$$

Comme on le voit il suffit de regrouper dans un opérateur (OU) les combinaisons des entrées donnant une valeur 1 dans la table. Il y a ici deux combinaisons à regrouper.

2.3 Équations d'un additionneur

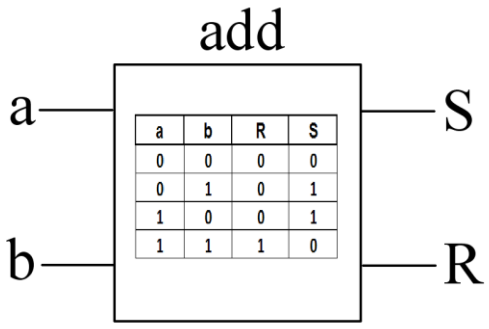
Le premier circuit qui nous vient à l'esprit est la réalisation d'un additionneur binaire. Nous pouvons trouver ses équations en analysant la table de vérité :

Note : dans un contexte de fonctions logiques le signe + est utilisé pour la fonction logique OU. Dans ce cadre pour éviter toute confusion l'opération d'addition sera notée add.

Table de vérité de l'addition

a	b	a add b	
0	0		0
0	1		1
1	0		1
1	1	1	0

a	b	R	S
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0



$$S = \overline{a} \cdot b + a \cdot \overline{b} = a \text{ xor } b$$

$$R = a \cdot b$$

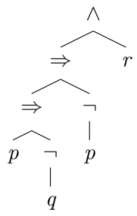
Le circuit représenté ci-dessus s'appelle un demi-additionneur. Nous voyons qu'il possède deux entrées et deux sorties, une somme S et une retenue R. Pour pouvoir additionner avec ce principe des nombres constitués de plusieurs bits il nous faut un additionneur plus complet capable d'intégrer à un rang d'addition n la retenue du rang précédent n-1. Il aura donc trois entrées.

Les équations de cet additionneur complet seront calculées en exercice.

Fondements logiques : exercices

Nom : Note : /40 /20

Commentaire :



1 Logique propositionnelle

Exercice_1. Propositions composées de logiques conditionnelles

Soit deux propositions p : je suis en forme q : je fais du vélo donner la signification des équations ci-dessous :

¬ p	
p ⇒ q	
p ∧ ¬ q	

☐ 1
☐ 1
☐ 1

Exercice_2. Est-ce que les énoncés ci-dessous sont des propositions si oui cochez la case :

☐ J'habite Grenoble. ☐ Un mois possède 31 jours. ☐ Passe-moi le beurre.
☐ Jean est en NSI. ☐ C'est la plus grosse planète. ☐ 20 est un nombre pair.

☐ 2

Exercice_3. Démonstration avec des tables de vérité

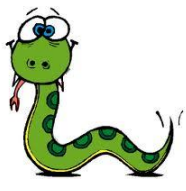
Les tables de vérité permettent de manière simple la démonstration de résultats. Le défaut dans leur emploi est l'explosion des combinaisons à tester dès que le nombre de variables d'entrées est grand.

a) Vérification d'une proposition

Vérifier si la proposition **(a⇒¬b) ⇔ (¬a⇒b)** est vraie, autrement dit si les colonnes (5) et (6) de la table de vérité ci-dessous sont identiques :

☐ 2

				(5)	(6)
a	**b**	**¬a**	**¬b**	**a⇒¬b**	**¬a⇒b**
F	F				
F	V				
V	F				
V	V				


b) ***Démonstration des lois de De Morgan :***

$$\neg (x \vee y) \equiv \neg x \wedge \neg y$$

(5) ☐ 2 (6)

a	b	¬(a∨b)	¬a	¬b	¬a ∧ ¬b
F	F				
F	V				
V	F				
V	V				

$$\neg (x \wedge y) \equiv \neg x \vee \neg y$$

(5) ☐ 2 (6)

a	b	¬(a∧b)	¬a	¬b	¬a ∨ ¬b
F	F				
F	V				
V	F				
V	V				

Exercice_4. Voyage en pays manichéen (source internet)

Imaginez-vous ethnologue. Vous étudiez une peuplade primitive qui présente un comportement manichéen extrême : lorsque plusieurs personnes participent à une même conversation sur un sujet donné, elles vont toutes avoir le même comportement manichéen tant que la conversation reste sur le même sujet, c'est-à-dire que toutes les affirmations seront soit des vérités, soit des mensonges.

Par contre, si le sujet de la conversation change, la nature des affirmations, soit mensonge, soit vérité, peut changer, mais toutes les affirmations seront de la même nature tant que le sujet ne changera pas à nouveau. Pour être autorisé à séjourner dans cette peuplade, vous devez respecter cette règle.

Vous participez à une conversation avec trois de leurs membres que nous appellerons X, Y et Z. Ceux-ci vous indiquent comment rejoindre leur village. Si vous n'arrivez pas à le rejoindre, vous ne serez pas autorisé à y séjourner.

Le premier sujet abordé est la région dans laquelle se trouve le village :

- X indique : « Le village se trouve dans la montagne » ;
- Z réplique : « Non, il ne s'y trouve pas » ;
- X reprend : « Ou alors dans les collines ».

Pour analyser logiquement les propositions nous utilisons la notation suivante :

- C le village se trouve sur une colline
- M le village se trouve dans la montagne
- X_1 et Z_1 les formules propositionnelles correspondant aux affirmations de X et Z sur ce premier sujet. (X a donné deux formules soit toutes deux vraies ou toutes deux fausses et Z une formule vraie ou fausse selon l'application de la règle du discours manichéen).

(Note pour simplifier les écritures on pourra utiliser la forme algébrique classique de la logique combinatoire à savoir la disjonction ou V représentée par + ; la conjonction ET ∧ représenté par • ; et la négation ou complément ¬y représentée par $\overline{y}$)

[1] Représenter le comportement manichéen des interlocuteurs dans le premier sujet abordé sous la forme d'une formule du calcul des propositions dépendant des formules propositionnelles X_1 et Z_1.

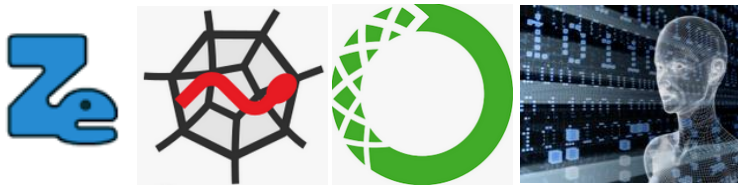
☐ 3

[2] Représenter les informations données par les participants sous la forme de deux formules du calcul des propositions X_1 et Z_1 dépendant des variables V et C.

X_1 : M + C $\qquad\qquad$ $\neg X_1$:

Z_1 : $\qquad\qquad$ $\neg Z_1$:

☐ 3



[3] Déduire en le justifiant par le calcul où se trouve le village en combinant les résultats du [1] et [2] :

☐ 2

☐ 2

2 La logique combinatoire les opérateurs de bases

Exercice_5. Fonctions logiques de bases

Recopier les tables de vérité des opérateurs ET ; ET-NON (NAND) ; OU ; OU-NON (NOR) ; XOR :

Table de vérité de la porte logique ET

A	B	S
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

Table de vérité de la porte logique ET-NON

A	B	S
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

Table de vérité de la porte logique OU

A	B	S
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

Table de vérité de la porte logique OU-NON

A	B	S
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

Table de vérité de la porte OU-Exclusif

A	B	S
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

Puis répondre aux questions suivantes pour la fonction ET : ☐ 2

A quelle condition la sortie S est-elle à 0 ?

❑ Si et seulement si toutes les entrées sont à 0 ❑ Si au moins une entrée est à 0 ❑ Seulement si A = B
❑ Si et seulement si toutes les entrées sont à 1 ❑ Si au moins une entrée est à 1 ❑ Seulement si A ≠ B

A quelle condition la sortie S est-elle à 1 ?

❑ Si et seulement si toutes les entrées sont à 0 ❑ Si au moins une entrée est à 0 ❑ Seulement si A = B
❑ Si et seulement si toutes les entrées sont à 1 ❑ Si au moins une entrée est à 1 ❑ Seulement si A ≠ B

Pour la fonction OU : ☐ 2

A quelle condition la sortie S est-elle à 0 ?

❑ Si et seulement si toutes les entrées sont à 0 ❑ Si au moins une entrée est à 0 ❑ Seulement si A = B
❑ Si et seulement si toutes les entrées sont à 1 ❑ Si au moins une entrée est à 1 ❑ Seulement si A ≠ B

A quelle condition la sortie S est-elle à 1 ?

❑ Si et seulement si toutes les entrées sont à 0 ❑ Si au moins une entrée est à 0 ❑ Seulement si A = B
❑ Si et seulement si toutes les entrées sont à 1 ❑ Si au moins une entrée est à 1 ❑ Seulement si A ≠ B

Pour la fonction ou-exclusif XOR : ☐ 2

A quelle condition la sortie S est-elle à 0 ?

❑ Si et seulement si toutes les entrées sont à 0 ❑ Si au moins une entrée est à 0 ❑ Seulement si A = B
❑ Si et seulement si toutes les entrées sont à 1 ❑ Si au moins une entrée est à 1 ❑ Seulement si A ≠ B

A quelle condition la sortie S est-elle à 1 ?

❑ Si et seulement si toutes les entrées sont à 0 ❑ Si au moins une entrée est à 0 ❑ Seulement si A = B
❑ Si et seulement si toutes les entrées sont à 1 ❑ Si au moins une entrée est à 1 ❑ Seulement si A ≠ B

Exercice_6. Mise en équation des tables de vérité.

☐ 3

Compléter la table de vérité du ou exclusif à trois entrées :

a	b	c	a xor b xor c
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

Nous utilisons ce résultat très important à savoir que le ou exclusif est un détecteur d'imparité.

Sa sortie est à 1 quand il a un nombre impair d'entrées à 1.

Puis écrire l'équation :

☐ 3

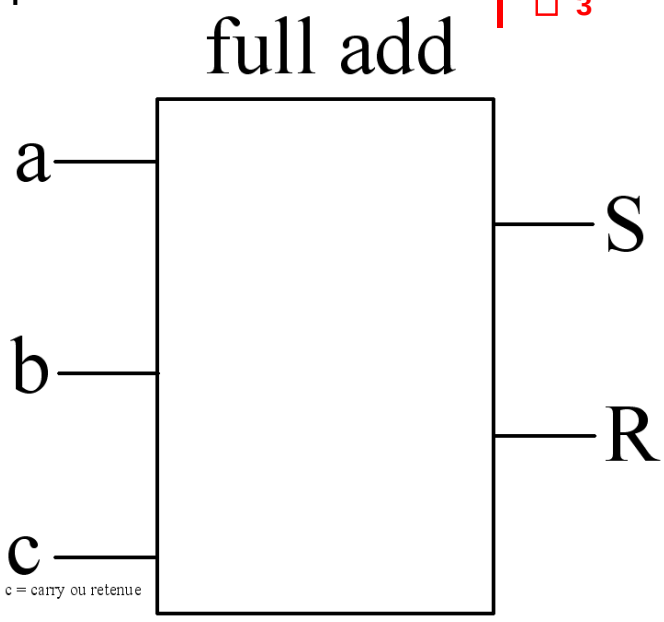
$$a \text{ xor } b \text{ xor } c = \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot c +$$

Exercice_7. Calcul des équations d'un additionneur complet

☐ 3

Compléter la table de vérité de l'additionneur :

a	b	c	R	S
0	0	0		
0	0	1		
0	1	0		
0	1	1		
1	0	0		
1	0	1		
1	1	0		
1	1	1		



Donner les équations :

S =

☐ 2

R=

☐ 2